Chương 1

Cách giải đơn giản cho bài toán quen thuộc

Ta hãy xét bài toán sau:

Bài toán 1. Tìm điều kiện của a, b, c, d, e để hàm số

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e} \quad (\text{ với } a.d \neq 0) \tag{1.1}$$

xác định và đồng biến trên khoảng $(\alpha, +\infty)$.

Đây là bài toán quen thuộc mà cách giải của nó thường là dùng tam thức bậc hai. Sau đây tôi xin giới thiệu một phương pháp khác để giải Bài toán 1.

Tập xác định của hàm số (1.1) là $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{-e}{d}\right\}$.

$$y' = \frac{adx^2 + 2aex + be - cd}{(dx + e)^2} = \frac{g(x)}{(dx + e)^2}.$$

Hàm số đã cho xác định và đồng biến trên khoảng $(\alpha, +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} g(x) & = adx^2 + 2aex + be - cd \geqslant 0, \forall x \in (\alpha; +\infty), \\ -\dfrac{e}{d} & \notin (\alpha; +\infty). \end{cases} \tag{1.2}$$

Điều kiện cần để hàm số đồng biến trên khoảng $(\alpha, +\infty)$ là $ad > 0$.

Vì nếu $ad < 0$, thì

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 \left[ad + \frac{2ae}{x} + \frac{be - cd}{x^2}\right] = -\infty,$$

nên tồn tại $x_0 \in (\alpha; +\infty)$ sao cho $g(x_0) < 0$. Do đó, hàm số không đồng biến trên khoảng $(\alpha, +\infty)$.

Xét hàm số $g(x) = adx^2 + 2aex + be - cd$ trên $[\alpha; +\infty)$ với $ad > 0, -\frac{e}{d} \notin (\alpha; +\infty)$.

Ta có $g'(x) = 2ax + 2ae, g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{e}{d}$.

x	$-\infty$		$-\frac{e}{d}$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0		$+$		
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(-\frac{e}{d})$	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Trên bảng biến thiên, ta thấy $g'(x) > 0$ với mọi $x \in (\alpha, +\infty)$. Do đó, hàm số g đồng biến trên khoảng $(\alpha, +\infty)$. Mặt khác g liên tục trên $[\alpha, +\infty)$, nên g đồng biến trên khoảng $[\alpha, +\infty)$. Từ đó, với mọi x thuộc khoảng $(\alpha, +\infty)$, thì $g(x) > g(\alpha)$.

Khi đó, hệ (1.2) tương đương với hệ

$$\begin{cases} g(\alpha) & \geqslant 0, \\ -\dfrac{e}{d} & \notin (\alpha; +\infty)\,. \end{cases}$$

Vậy hàm số đã cho hàm số đồng biến trên khoảng $(\alpha, +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} ad & > 0, \\ g(\alpha) & \geqslant 0, \\ -\dfrac{e}{d} & \notin (\alpha; +\infty) \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} ad & > 0, \\ g(\alpha) & \geqslant 0, \\ -\dfrac{e}{d} & \leqslant \alpha. \end{cases}$$

Sau đây là một vài ví dụ.

Ví dụ 1.1. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2(m+1)x + 2}{x+1}$.

Với giá trị nào của m thì hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

Lời giải. Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Ta có

$$y' = \frac{x^2 + 2x + 2m}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}.$$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $g(0) = 2m \geqslant 0$ hay $m \geqslant 0$. ❑

Ví dụ 1.2. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - (m+1)x + 4m^2 - 4m - 2}{x - (m-1)}$.

Với giá trị nào của m thì hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

Lời giải. Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}\backslash\{m-1\}$. Ta có

$$y' = \frac{x^2 - 2\left(m-1\right)x - 3m^2 + 4m + 1}{\left[x - (m-1)\right]^2} = \frac{g(x)}{\left[x - (m-1)\right]^2}.$$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} g(0) = -3m^2 + 4m + 1 \geqslant 0 \\ m - 1 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2-\sqrt{7}}{3} \leqslant m \leqslant \dfrac{2+\sqrt{7}}{3} \\ m \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{7}}{3} \leqslant m \leqslant 1.$$

❑

Ví dụ 1.3. Cho hàm số $y = \dfrac{mx^2 + (m+1)x - 1}{2x - m}$.

Với giá trị nào của m thì hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

Lời giải. Miền xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \backslash \left\{ \dfrac{m}{2} \right\}$.

Trường hợp 1. Nếu $m = 0$, ta có $y = \dfrac{x-1}{2x}$, $y' = \dfrac{1}{2x^2} > 0, \forall x \in D$.

Trường hợp 2. Với $m \neq 0$, ta có

$$y' = \frac{2mx^2 - 2m^2x - m^2 - m + 2}{(2x-m)^2} = \frac{g(x)}{(2x-m)^2}.$$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2m & > 0 \\ \dfrac{m}{2} & \leqslant 1 \\ g(1) & = -3m^2 + m + 2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m & > 0 \\ m & \leqslant 2 \\ -\dfrac{2}{3} & \leqslant m \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leqslant 1.$$

Từ hai trường hợp trên ta thấy, hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi $0 \leqslant m \leqslant 1$.

❏

Chứng minh tương tự **Bài toán 1**, ta có các kết quả sau:

Hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ $(a.d \neq 0)$

▷ **1**. xác định và nghịch biến trên khoảng $(\alpha; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} ad & < 0, \\ g(\alpha) & \leqslant 0, \\ -\dfrac{e}{d} & \notin (\alpha; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad & < 0, \\ g(\alpha) & \leqslant 0, \\ -\dfrac{e}{d} & \leqslant \alpha. \end{cases}$$

▷ **2**. xác định và đồng biến trên khoảng $(-\infty; \alpha)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} ad & > 0, \\ g(\alpha) & \geqslant 0, \\ -\dfrac{e}{d} & \notin (-\infty; \alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad & > 0, \\ g(\alpha) & \geqslant 0, \\ -\dfrac{e}{d} & \geqslant \alpha. \end{cases}$$

▷ **3**. xác định và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; \alpha)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} ad & < 0, \\ g(\alpha) & \leqslant 0, \\ -\dfrac{e}{d} & \notin (-\infty; \alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad & < 0, \\ g(\alpha) & \leqslant 0, \\ -\dfrac{e}{d} & \geqslant \alpha. \end{cases}$$

▷ **4**. xác định và đồng biến trên khoảng $(\alpha; \beta)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} g(\alpha) & \geqslant 0, \\ g(\beta) & \geqslant 0, \\ -\dfrac{e}{d} & \notin (\alpha;\ \beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(\alpha) \geqslant 0, \\ g(\beta) \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{ll} -\frac{e}{d} & \geqslant \beta, \\ -\frac{e}{d} & \leqslant \alpha. \end{array} \right. \end{cases}$$

▷ **5**. xác định và nghịch biến trên khoảng $(\alpha;\beta)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} g(\alpha) & \leqslant 0, \\ g(\beta) & \leqslant 0, \\ -\dfrac{e}{d} & \notin (\alpha;\ \beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(\alpha) \leqslant 0, \\ g(\beta) \leqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} -\frac{e}{d} \geqslant \beta, \\ -\frac{e}{d} \leqslant \alpha. \end{array}\right. \end{cases}$$

Chương 2

Biện luận số nghiệm của phương trình

Để biện luận số nghiệm của phương trình có dạng $f(x,m) = 0$ (**) (trong đó m là tham số) với $x \in [a;b]$. Thường ta đưa phương trình (**) về dạng $g(x) = h(m), x \in [a;b]$. Trong một số trường hợp đoạn $[a;b]$ được biết trước. Tuy nhiên, trong một số bài toán, phải qua một quá trình biến đổi thì ta mới thấy được đoạn $[a;b]$. Dưới đây là một số bài toán như vậy.

Ví dụ 2.1. Tìm a sao cho phương trình sau có hai nghiệm phân biệt

$$x^2 + 4x - 2|x-a| + 2 - a = 0. \tag{2.1}$$

Lời giải.

$$(2.1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant a \\ -x^2 - 2x - 2 = a \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x^2+6x+2}{3} = a \\ x < a \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -x^2 - 2x - 2 \\ -x^2 - 2x - 2 = a \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{x^2+6x+2}{3} = a \\ x < \dfrac{x^2+6x+2}{3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leqslant -2 \\ x \geqslant -1 \end{array}\right. \\ -x^2 - 2x - 2 = a \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x^2+6x+2}{3} = a \\ \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > -1 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

Số nghiệm của phương trình (2.1) chính là số giao điểm của đường thẳng $y = a$ với hợp của hai đồ thị: Đồ thị của hàm số $y = -x^2 - 2x - 2$ trong miền $D_1 = (-\infty; -2] \cup [-1; +\infty)$ và đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2+6x+2}{3}$ trong miền $D_2 = (-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$.

Lập bảng biến thiên ta thấy phương trình (2.1) có hai nghiệm phân biệt khi $a > -2$ hoặc $a < -\dfrac{7}{3}$. ❑

Ví dụ 2.2. Tìm a sao cho phương trình sau có đúng hai nghiệm

$$x^2 - a = \sqrt{x-a}. \tag{2.2}$$

Lời giải.

$$(2.2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - a \geqslant 0 \\ x^4 - 2ax^2 + a^2 = a - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leqslant x^2 \\ a^2 - (2x^2+1)a + x^4 + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leqslant x^2 \\ \left[\begin{array}{l} a = x^2 + x \\ a = x^2 - x + 1 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = x^2 + x \\ a \leq x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} a = x^2 - x + 1 \\ a \leqslant x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = x^2 + x \\ x \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a = x^2 - x + 1 \\ x \geqslant 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Số nghiệm của phương trình (2.2) chính là số giao điểm của đường thẳng $y = a$ với hợp của hai đồ thị: parabol $(P_1) : y = x^2 + x$ trong miền $D_3 = (-\infty; 0]$ và parabol $(P_2) : y = x^2 - x + 1$ trong miền $D_4 = [1; +\infty)$.

Lập bảng biến thiên ta thấy phương trình (2.2) có đúng hai nghiệm khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{4} < a \leqslant 0 \\ a \geqslant 1 \end{array}\right.$

❑

Ví dụ 2.3. Tìm a sao cho phương trình

$$\lg(2x - a - 1) = \lg(x^2 + 4ax) \tag{2.3}$$

có nghiệm duy nhất.

Lời giải. $(2.3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - a - 1 > 0 \\ 2x - a - 1 = x^2 + 4ax \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 > a \\ \dfrac{-x^2 + 2x - 1}{4x + 1} = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 > \dfrac{-x^2 + 2x - 1}{4x + 1} \\ \dfrac{-x^2 + 2x - 1}{4x + 1} = a \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{4} < x < 0 \\ x > \dfrac{4}{9} \end{array}\right. \\ \dfrac{-x^2 + 2x - 1}{4x + 1} = a \end{cases}$$

Xét hàm số $y = \dfrac{-x^2 + 2x - 1}{4x + 1}$ với $x \in \left(-\dfrac{1}{4}; 0\right) \cup \left(\dfrac{4}{9}; +\infty\right)$.

Ta có $y' = \dfrac{-2(2x^2 + x - 3)}{(4x + 1)^2}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 0 \\ x = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow y = \dfrac{5}{4} \end{array}\right.$$

Để ý

$$y(0) = -1, y\left(\frac{4}{9}\right) = -\frac{1}{9}.$$

Lập bảng biến thiên, ta thấy phương trình (2.3) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $a = 0$ hoặc $-1 \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{9}$.

❑

▷ **2.4.** Biện luận theo a số nghiệm của phương trình

$$ax^2 - 2(a-1)x + 2 = |ax - 2|. \tag{2.4}$$

Đáp số.

- Nếu $a < 0$; $0 < a < \dfrac{4\sqrt{10}+14}{9}$ và $a \neq 2$; $a > 4$, thì (2.4) có hai nghiệm.
- Nếu $a = 0$ hoặc $a = 2$, thì (2.4) có nghiệm duy nhất $x = 0$.
- Nếu $a = \dfrac{4\sqrt{10}+14}{9}$ hoặc $a = 4$, thì (2.4) có ba nghiệm.
- Nếu $\dfrac{4\sqrt{10}+14}{9} < a < 4$, thì (2.4) có bốn nghiệm.

▷ **2.5.** Tìm tất cả các giá trị của a sao cho phương trình $2\log(x+3) = \log ax$ có nghiệm duy nhất.

Đáp số. $a < 0$ hoặc $a = 12$.

▷ **2.6.** Tìm a để phương trình $x|x+2a| + 1 - a = 0$ có nghiệm duy nhất.

Đáp số. $a < \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $a > 1$.

Chương 3

Sử dụng đạo hàm để giải bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất

Trên Tạp chí THVTT số 7, năm 2000 đặt ra vấn đề giải bài toán sau: Tìm giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số

$$y = \sqrt{(x-a)^2+b^2} + \sqrt{(x-c)^2+d^2}, x \in [\alpha;\, \beta], \tag{3.1}$$

với bài toán cụ thể là tìm GTLN và GTNN của hàm số

$$y = \sqrt{\cos^2 x - 2\cos x + 10} + \sqrt{\cos^2 x + 6\cos x + 10}. \tag{3.2}$$

Trước hết, ta hãy giải bài toán (3.1).

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $b \geqslant 0$ và $d \geqslant 0$.

- Nếu $b = d = 0$, khi đó $y = |x-a| + |x-c|$. Bạn đọc tự giải bài toán bằng cách xét dấu của các nhị thức $x-a, x-c$ trên $[\alpha;\beta]$.
- Nếu $b = 0$ và $d > 0$, khi đó $y = |x-a| + \sqrt{(x-c)^2+d^2}$.

  Suy ra

$$y = \begin{cases} x - a + \sqrt{(x-c)^2+d^2}, & \text{nếu } x \geqslant a; \\ a - x + \sqrt{(x-c)^2+d^2}, & \text{nếu } x < a. \end{cases}$$

  Từ đó

$$y' = \begin{cases} 1 + \dfrac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+d^2}}, & \text{nếu } x > a; \\ -1 + \dfrac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+d^2}}, & \text{nếu } x < a. \end{cases}$$

  Vì

$$\frac{|x-c|}{\sqrt{(x-c)^2+d^2}} < \frac{|x-c|}{\sqrt{(x-c)^2}} = 1$$

hay

$$-1 < \frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+d^2}} < 1$$

Do đó

$$1 + \frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+d^2}} > 0 \text{ và } -1 + \frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+d^2}} < 0$$

nên

$$1 + \frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+d^2}} > 0 \text{ và } -1 + \frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+d^2}} < 0.$$

Do đó $y' > 0$ với mọi $x \in [a, +\infty)$ và $y' < 0$ với mọi $x \in (-\infty, a)$. Vậy y tăng trên $[a, +\infty)$ và giảm trên $(-\infty, a)$.

Mặt khác

$$\lim_{x\to a^+} y = \lim_{x\to a^-} y = y(a) = \sqrt{(a-c)^2+d^2},$$

nên y liên tục tại $x = a$. Suy ra $x = a$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Vậy

- Nếu $a \in [\alpha; \beta]$, thì $\max\limits_{x\in[\alpha;\beta]} y = \max\{y(\alpha), y(\beta)\}$ và $\min\limits_{x\in[\alpha;\beta]} y = y(a)$.
- Nếu $a \notin [\alpha; \beta]$, thì $\max\limits_{x\in[\alpha;\beta]} y = \max\{y(\alpha), y(\beta)\}$ và $\min\limits_{x\in[\alpha;\beta]} y = \min\{y(\alpha), y(\beta)\}$.

- Nếu $b > 0$ và $d = 0$ ta cũng làm tương tự.

- Nếu $b > 0$ và $d > 0$, ta có $y' = \dfrac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+b^2}} + \dfrac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+d^2}}$

  - Nếu $a = c$, thì

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+b^2}} + \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+d^2}} \\ &= (x-a)\left[\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+d^2}}\right]. \\ y' &= 0 \Leftrightarrow x = a. \end{aligned}$$

  Cần chú ý rằng y liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to\infty} y = +\infty$ nên $x = a$ là điểm cực tiểu của hàm số. Do đó ta cũng có kết luận như trường hợp $b = 0$ và $d > 0$.

- Nếu $a \neq c$ thì

$$\begin{aligned} y' = 0 &\Leftrightarrow \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+b^2}} + \frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+d^2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+b^2}} = -\frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+d^2}} \\ &\Leftrightarrow (x-a)\sqrt{(x-c)^2+d^2} = -(x-c)\sqrt{(x-a)^2+b^2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-a).(x-c) < 0 \\ (x-a)^2\left[(x-c)^2+d^2\right] = (x-c)^2\left[(x-a)^2+b^2\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-a).(x-c) < 0 \\ d^2(x-a)^2 = b^2(x-c)^2 \end{cases}$$

1. Nếu $a \neq c$ và $b^2 = d^2$, thì phương trình $y' = 0$ có nghiệm $x = \dfrac{a+c}{2}$.

   Nghiệm này thoả điều kiện $(x-a)(x-c) < 0$.

   Thật vậy, với $x = \dfrac{a+c}{2}$, thì

   $$(x-a).(x-c) = \left(\frac{a+c}{2} - a\right)\left(\frac{a+c}{2} - c\right) = \frac{(c-a)(a-c)}{4} = -\frac{(a-c)^2}{4} < 0.$$

   Ta có thể lý luận nghiệm $x = \dfrac{a+c}{2}$ thoả điều kiện $(x-a)(x-c) < 0$ như sau: Điều kiện $(x-a)(x-c) < 0$ có nghĩa là nghiệm x (nếu có) của phương trình $y' = 0$ phải nằm giữa hai số a và c. Mà x là trung bình cộng của a và c, nên x phải nằm giữa hai số này.

   Mặt khác, y liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to\infty} y = +\infty$, nên $x = \dfrac{a+c}{2}$ là điểm cực tiểu của hàm số. Do đó

   – Nếu $\dfrac{a+c}{2} \in [\alpha;\beta]$, thì $\max\limits_{x\in[\alpha;\beta]} y = \max\left\{y(\alpha), y(\beta)\right\}$ và $\min\limits_{x\in[\alpha;\beta]} y = y\left(\dfrac{a+c}{2}\right)$.

   – Nếu $\dfrac{a+c}{2} \notin [\alpha;\beta]$, thì $\max\limits_{x\in[\alpha;\beta]} y = \max\left\{y(\alpha), y(\beta)\right\}$ và $\min\limits_{x\in[\alpha;\beta]} y = \min\left\{y(\alpha), y(\beta)\right\}$.

2. Nếu $a \neq c, b^2 \neq d^2$, thì $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)(x-c) < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{ad+bc}{b+d}, \\ x_2 = \dfrac{bc-ad}{b-d}. \end{array}\right. \end{cases}$

   Đặt

   $$f(x) = d^2(x-a)^2 - b^2(x-c)^2.$$

   Để ý $f(x)$ là tam thức bậc hai.

   Ta có $f(a) = -b^2(a-c)^2$ và $f(c) = d^2(c-a)^2$. Suy ra $f(a)f(c) = -b^2d^2(a-c)^4 < 0$. Điều này chứng tỏ phương trình $y' = 0$ có đúng một nghiệm (hoặc x_1 hoặc x_2 nằm giữa hai số a và c.

   – Với nghiệm x_1, ta có

   $$\begin{aligned} (x-a)(x-c) &= \left(\frac{ad+bc}{b+d} - a\right)\left(\frac{ad+bc}{b+d} - c\right) \\ &= \frac{(bc-ab)(ad-cd)}{(b+d)^2} \\ &= \frac{b(c-a)d(a-c)}{(b+d)^2} \\ &= \frac{-bd(a-c)^2}{(b+d)^2}. \end{aligned}$$

Do $bd > 0$, nên $(x-a)(x-c) < 0$. Do đó, x_1 là nghiệm của phương trình $y' = 0$. Từ đó, x_2 không thoả điều kiện $(x-a)(x-c) < 0$.

– Nếu $x_1 \in [\alpha; \beta]$, thì $\max\limits_{x \in [\alpha;\beta]} y = \max \{y(\alpha), y(\beta)\}$ và $\min\limits_{x \in [\alpha;\beta]} y = y(x_1)$.

– Nếu $x_1 \notin [\alpha; \beta]$, thì $\max\limits_{x \in [\alpha;\beta]} y = \max \{y(\alpha), y(\beta)\}$ và $\min\limits_{x \in [\alpha;\beta]} y = \min \{y(\alpha), y(\beta)\}$.

Việc nhớ các kết quả của bài toán tổng quát, theo tôi, là không cần thiết, mà bạn nên chú ý đến kỹ năng trong việc giải từng bài toán cụ thể mà nó có dạng của bài toán (3.1).

Bạn chú ý tới cách viết đạo hàm y' ở cách chứng minh trên. Nó rất thuận lợi cho việc tìm nghiệm của phương trình $y' = 0$.

Với cùng cách làm như trên, thì việc giải bài toán (3.2) trở nên đơn giản. Sau đây là lời giải của bài toán (3.2).

Đặt $t = \cos x, |t| \leqslant 1$, thì (3.2) trở thành tìm GTLN và GTNN của hàm số

$$y = \sqrt{t^2 - 2t + 10} + \sqrt{t^2 + 6t + 10}, \quad |t| \leqslant 1.$$

Ta có

$$y' = \frac{t-1}{\sqrt{(t-1)^2 + 9}} + \frac{t+3}{\sqrt{(t+3)^2 + 1}} = \frac{(t-1)\sqrt{(t+3)^2 + 1} + (t+3)\sqrt{(t-1)^2 + 9}}{\sqrt{(t+3)^2 + 1}.\sqrt{(t-1)^2 + 9}}.$$

$$\begin{aligned} y' = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} (t-1)(t+3) < 0 \\ (t-1)^2 \left[(t+3)^2 + 1\right] = (t+3)^2. \left[(t-1)^2 + 9\right] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -3 < t < 1 \\ (t-1)^2 = 9(t+3)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow t = -2. \end{aligned}$$

Do kiện $|t| \leqslant 1$, nên ta loại nghiệm $t = 2$. Mặt khác y liên tục trên $[-1; 1]$, $y(-1) = \sqrt{13} + \sqrt{5}$ và $y(1) = 3 + \sqrt{17}$.

Do đó,

$$\max_{[-1;1]} y = 3 + \sqrt{17} \text{ và } \min_{[-1;1]} y = \sqrt{13} + \sqrt{5}.$$

Ví dụ 3.1. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(1; 1; 0)$ và $B(3; -1; 4)$ và đường thẳng (D) có phương trình $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+2}{2}$. Tìm điểm M trên đường (D) thẳng sao cho tổng các độ dài $MA + MB$ nhỏ nhất.

Xét tuỳ ý điểm M thuộc (D), $M(t-1; -t+1; 2t-2)$. Ta có

$$\begin{aligned} MA + MB &= \sqrt{(t-2)^2 + t^2 + (2t-2)^2} + \sqrt{(t-4)^2 + (2-t)^2 + (2t-6)^2} \\ &= \sqrt{6t^2 - 12t + 8} + \sqrt{6t^2 - 36t + 56} \\ &= \sqrt{6}\left(\sqrt{t^2 - 2t + \frac{4}{3}} + \sqrt{t^2 - 6t + \frac{4}{3}}\right). \end{aligned}$$

Lời giải. Đặt $y = MA + MB$. Ta có

$$y' = \sqrt{6}\left[\frac{t-1}{\sqrt{(t-1)^2+\frac{1}{3}}} + \frac{t-3}{\sqrt{(t-3)^2+\frac{1}{3}}}\right].$$

Cũng với cách giải như bài trên ta thì $t = 2$ là nghiệm của phương trình $y' = 0$. Vậy $M(1;-1;2)$ là điểm cần tìm. ❑

Ví dụ 3.2. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(3;0;3), B(4;2;1)$ và đường thẳng (D) có phương trình $\begin{cases} x = t, \\ y = t, \\ z = 3 - t. \end{cases}$

Tìm điểm M trên đường thẳng (D) sao cho hiệu số khoảng cách $MA - MB$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải. Xét tuỳ ý điểm thuộc M thuộc (D), toạ độ M là $M(t;t;3-t)$.

Đặt

$$T = MA - MB = \sqrt{3t^2 - 6t + 9} - \sqrt{3t^2 - 16t + 24}.$$

Phương trình $T' = 0$ có nghiệm $t = 6$.

Ngoài ra $\lim\limits_{t\to+\infty} T = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ và $\lim\limits_{t\to-\infty} T = -\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$, T liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó, T đạt cực đại tại $t = 6$. Vậy điểm cần tìm là $M(6;6;-3)$. ❑

▷ **3.3.** Tìm m để phương trình $\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1} = m$ có nghiệm.

Đáp số. $m \geqslant 2$.

▷ **3.4.** Tìm m để phương trình $\sqrt{4x^2+2x+1} - \sqrt{4x^2-2x+1} = m$ có nghiệm.

Đáp số. $-\dfrac{1}{2} < m < \dfrac{1}{2}$.

▷ **3.5.** Tìm điểm P trên đường thẳng $(d) : 2x - y - 5 = 0$ sao cho tổng khoảng cách từ P đến hai điểm $M(-7;1)$ và $N(-5;5)$ là nhỏ nhất.

Đáp số. $P(2;-1)$.

▷ **3.6.** Cho hai điểm $A(1;2;-1), B(2-\sqrt{2};2;-3)$ và đường thẳng (d) có phương trình

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0, \\ y + z - 5 = 0. \end{cases}$$

Tìm điểm M thuộc (d) sao cho $AM + BM$ nhỏ nhất.

Đáp số. $N\left(2; \dfrac{7}{3}; -\dfrac{4}{3}\right)$.

Trần Văn Toàn,

Giáo viên trường THPT Nguyễn Trãi,

Biên Hoà, Đồng Nai.

Mục lục